Devoir sur Table 6

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
 - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
 - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :

- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1*(adapté de Oral CCINP PC 2019)*

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \operatorname{ch}(2x) - \cos(2y)$.

On considère les ensembles $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$.

1. Pour tout t positif, montrer les inégalités $\sin(t) \leq t$ et $\operatorname{sh}(t) \geq t$.
2. Déterminer les dérivées partielles de f et en déduire que f admet une infinité de points critiques
3. Déterminer la matrice hessienne de f et en déduire la ou les natures de ces points critiques
4. Montrer que f admet un minimum global nul sur $\mathbb{R}^2$.
5. Justifier que D est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$. En déduire que f admet un maximum sur D .
6. En déduire qu'il existe $t_0 \in [0, 2\pi]$ tel que le maximum de f sur D soit égal à $f(\cos(t_0), \sin(t_0))$.
7. On pose $g : \theta \mapsto f(\cos(\theta), \sin(\theta))$, justifier que l'on peut limiter l'étude de g à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
8. Étudier les variations de g sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
9. En déduire le maximum de f sur D .

Exercice 2*(Maths B PT 2022)*

L'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire et de son repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ usuels.

Soient a et b deux réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

On considère alors la conique $C_{a,b}$ d'équation : $ax^2 + 2bxy + ay^2 - 4(x + y) = 4$.

1. Dans cette question uniquement $a = 5$ et $b = -3$.
 - (a) Étudier la conique $C_{5,-3}$. On donnera en particulier :
 - une équation réduite en précisant le repère dans lequel elle est obtenue,

- sa nature,
- les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de son centre,
- les coordonnées dans le repère de votre choix (à préciser) de ses sommets.

(b) Tracer la conique $C_{5,-3}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On utilisera la feuille de papier millimétré fournie et on prendra une unité de 4 cm.

2. Déterminer en fonction de a et b le type de conique qu'est $C_{a,b}$.

On considère désormais la conique $C_{A,B}$ d'équation : $Ax^2 + 2Bxy + Ay^2 - 4(x+y) = 4$ où A et B sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètres respectifs $p_A \in]0, 1[$ et $p_B \in]0, 1[$. On définit la variable aléatoire X par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et :

- $X = 1$ si $C_{A,B}$ est du type ellipse,
- $X = 0$ si $C_{A,B}$ est du type parabole,
- $X = -1$ si $C_{A,B}$ est du type hyperbole.

3. Détermination de la loi de X .

(a) Calculer $S = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p_A)^{k-1} (1-p_B)^{k-1}$.

(b) Justifier que $\mathbb{P}(A+B=0) = 0$.

(c) Justifier que $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(A=B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A=k)\mathbb{P}(B=k)$.

(d) En déduire que $\mathbb{P}(X=0) = \frac{p_A p_B}{p_A - p_A p_B + p_B}$.

(e) Justifier que pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{P}(B > k) = (1-p_B)^k$.

(f) En déduire que $\mathbb{P}(B > A) = \frac{p_A(1-p_B)}{p_A - p_A p_B + p_B}$.

(g) En déduire $\mathbb{P}(X=-1)$ puis $\mathbb{P}(X=1)$.

(h) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X .

Exercice 3

(Maths B PT 2014)

Soit A, B, C trois points non alignés du plan $\mathbb{R}^2$.

On suppose que le triangle ABC est direct, et n'a que des angles aigus. On note :

$$a = BC \quad , \quad b = AC \quad , \quad c = AB$$

On désigne par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) , et on note $h = AH$.

$\hat{A}$ désigne l'angle géométrique $\widehat{BAC}$, $\hat{B}$ l'angle géométrique $\widehat{CBA}$, et $\hat{C}$ l'angle géométrique $\widehat{ACB}$.

Pour cet exercice, le tracé d'un dessin sur la copie sera apprécié.

1. Donner la relation entre $\sin(\hat{C})$, h et b .

2. Rappeler la formule donnant l'aire $\mathcal{A}$ du triangle $\widehat{ABC}$ en fonction de a et h .

3. Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de a , b et $\sin(\hat{C})$.

4. Montrer que : $\frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b} = \frac{\sin(\hat{C})}{c}$

5. Comparer $\|\vec{BC} \wedge \vec{AC}\|$, $\|\vec{BC} \wedge \vec{AH}\|$ et $\det(\vec{BC}, \vec{AC})$. Donner une interprétation en termes d'aires du résultat obtenu.

6. Exprimer AB^2 en fonction de a , b et $\cos(\hat{C})$.

7. Retrouver le résultat de la question 6. à l'aide du théorème de Pythagore.

Exercice 4

Une partie Δ de $\mathbb{R}^2$ est appelé un cône positif s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall u \in \Delta, \quad \forall t > 0, \quad tu \in \Delta$$

Pour une fonction $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit que f est α -homogène si

$$\forall u \in \Delta, \quad \forall t > 0, \quad f(tu) = t^\alpha f(u)$$

Le but de cet exercice est de prouver la formule d'Euler pour les fonctions homogènes de classe $\mathcal{C}^1$:

$$f \text{ est } \alpha\text{-homogène} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in \Delta, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

On notera $(\mathcal{E})$ l'équation

$$(\mathcal{E}) : \forall (x, y) \in \Delta, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

1. Deux exemples

(a) Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est 2-homogène et qu'elle vérifie l'équation $(\mathcal{E})$

(b) Soit $\Delta_1 = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $f : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

Montrer que Δ_1 est un cône positif et que f est -1 homogène.

(c) On admet que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Δ_1 . Déterminer ses dérivées partielles et vérifier que

$$\forall (x, y) \in \Delta_1, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -f(x, y)$$

On revient désormais au cas général.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Rappeler sans démonstration la formule donnant la dérivée de la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$

3. Première implication

Soit f une fonction α -homogène sur Δ un cône positif et $(x_0, y_0) \in \Delta$. On pose $g : t \mapsto t^{-\alpha} f(tx_0, ty_0)$

(a) Justifier que g est une fonction constante.

(b) Montrer que

$$\forall t > 0, \quad t^{-\alpha} \left(x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(tx_0, ty_0) + y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(tx_0, ty_0) \right) = \alpha t^{\alpha-1} f(x_0, y_0)$$

(c) En déduire que f vérifie $(\mathcal{E})$

4. Seconde implication

Soit désormais f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ un cône positif vérifiant l'équation $(\mathcal{E})$ et $(x_0, y_0) \in \Delta$

On pose de nouveau $g : t \mapsto t^{-\alpha} f(tx_0, ty_0)$

(a) Calculer, pour $t > 0$, $g'(t)$ et montrer que g est constante

(b) En déduire que f est α -homogène.

5. Conclusion

6. Soit f une fonction α -homogène de classe $\mathcal{C}^2$ sur Δ un cône positif

(a) Montrer que les dérivées partielles de f sont $(\alpha - 1)$ -homogène

(b) En déduire que f vérifie l'équation $(\mathcal{E}_2)$ suivante

$$(\mathcal{E}_2) : \quad \forall (x, y) \in \Delta, \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \alpha(\alpha - 1)f(x, y)$$

(c) Une fonction vérifiant $(\mathcal{E}_2)$ est-elle nécessairement α -homogène ?